Geometría Algebraica

Por Jean-Pierre Serre

1. Introducción. Me gustaría exponer aquí algunos desarrollos recientes de la geometría algebraica. Debo precisar que tomo el último término en el sentido que ha cobrado desde hace algunos años: el de la *teoría de esquemas*.

No vamos a repetir la definición precisa de esquema; remito para ello a la conferencia de Grothendieck en el congreso anterior. Digamos solamente que, mientras que una variedad algebraica se construye a partir de álgebras polinómicas sobre cuerpos, un *esquema* se construye a partir de anillos conmutativos cualesquiera (y un esquema separado es un esquema Hausdorff[1]). Por supuesto, ciertos teoremas exigen hipótesis de finitud (veremos varios ejemplos), pero dichas hipótesis son verificadas por anillos que la geometría algebraica antigua no podía tratar más que indirectamente (e incompletamente), como el anillo $\mathbb{Z}$ de los enteros. (Por ello, se puede decir que una parte importante de la aritmética consiste justamente en el estudio de los esquemas de tipo finito sobre $\mathbb{Z}$ - es, por ejemplo, el marco natural de la teoría de funciones zeta y L, a la Artin-Weil.) Otro tipo de anillos que intervienen frecuentemente es el de los *anillos locales*: cuando se quiere estudiar un morfismo $f : X \to Y$ en un entorno de $f^{-1}(y)$, con $y \in Y$, uno se ve obligado a sustituir X por un esquema X' sobre el anillo local $\mathcal{O}_y$ de y, deducido de X por la imagen inversa a través del morfismo $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_y) \to Y$; de igual manera, para localizar más todavía, se reemplaza $\mathcal{O}_y$ por su completado $\hat{\mathcal{O}}_y$.

No es mi intención dar una descripción completa de los resultados obtenidos estos últimos años en teoría de esquemas, me limitaré a los dos temas siguientes: *teoremas de existencia*, y estudio de los *esquemas sobre un anillo local noetheriano completo*. Para el resto, véanse las exposés de Grothendieck en el seminario Bourbaki [**7, 10**] y el seminario del IHES [**9**], así como, por supuesto, los *Elementos* [**8**].

2. Teoremas de existencia . Se trata de construir un esquema M con ciertas propiedades; lo más normal, como Grothendieck ha puesto de manifiesto, es que estas propiedades de expresen cómodamente diciendo que M *representa* cierto funtor. Recordamos lo que eso significa:

Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Sea **Conj** la categoría de conjuntos, y sea $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Conj}$ un funtor contravariante. Se dice que una pareja (M, m), donde $M \in Ob(\mathcal{C})$, $m \in F(M)$, *representa* a F si, para todo $T \in Ob(\mathcal{C})$, la aplicación de $\mathrm{Hom}(T, M)$ en $F(T)$ que asocia a $\varphi \in \mathrm{Hom}(T, M)$ el elemento $F\varphi(m)$ de $F(T)$ es biyectiva; si $h_M : \mathcal{C} \to \mathbf{Conj}$ designa el funtor $h_M(T) = \mathrm{Hom}(M, T)$, esto equivale a decir que m define un isomorfismo de h_M en F. Cuando exista una tal pareja (M, m), es única (salvo un isomorfismo único), y se dice que F es *representable* (se dice también que M representa a F). En geometría algebraica, corrientemente se toma como $\mathcal{C}$ la categoría $\mathbf{Esq}_S$ de esquemas sobre un esquema base

[1]Grothendieck cree que haría falta extender esta definición, de tal manera que se pueda hablar de "esquemas sobre un espacio anillado", siendo dicho espacio, por ejemplo, una variedad diferenciable o analítica (como en los trabajos de Kodaira-Spencer sobre variedades de módulos).

S (esto es, dotados de un morfismo en S). Se tienen criterios generales manejables[2] que permiten decidir si un funtor F dado es representable o no. En todo caso es necesario que F transforme límites inductivos (de esquemas sobre S) en límites proyectivos (de conjuntos); en particular, F debe ser un funtor *local*: si U recorre el conjunto de abiertos de un S-esquema T, el prehaz de los $F(U)$ es un *haz*.

Ejemplos de esquemas definidos por este procedimiento:

(i) *Esquemas de Grassmann.* Demos un esquema S, un $\mathbf{O}_S$-módulo casi coherente $\mathcal{F}$, y un entero $n \geq 0$. Si T es un S-esquema, denotamos $\mathcal{F} \times_S T$ la imagen inversa de $\mathcal{F}$ por el morfismo canónico de T en S, y sea $F_n(T)$ el conjunto de los *cocientes del* $\mathcal{O}_T$*-módulo* $\mathcal{F} \times_S T$ *que son localmente libres de rango* n; es un funtor contravariante de T (sobre la categoría de S-esquemas). Se ve fácilmente (consúltese Grothendieck [**11**], exposé 12, para el caso analítico) que este funtor es representable por un S-esquema $\mathrm{Grass}_n(\mathcal{F})$, llamado la *grassmanniana* (de índice n) de $\mathcal{F}$; si $\mathcal{F}$ es de tipo finito, $\mathrm{Grass}_n(\mathcal{F})$ es proyectivo sobre S; si además $\mathcal{F}$ es localmente libre, $\mathrm{Grass}_n(\mathcal{F})$ es simple sobre S. Para $n = 1$, recuperamos el *esquema proyectivo* $\mathbf{P}(\mathcal{F})$ asociado a $\mathcal{F}$ (ver [**8**], II-4.1.1); se definen igualmente los *esquemas de banderas* de $\mathcal{F}$.

(ii) *Esquemas de Hilbert.* Sea S un esquema separado noetheriano, y sea X un esquema separado proyectivo sobre S; sea $\mathcal{C}$ la categoría de S-esquemas localmente noetherianos. Si $T \in Ob(\mathcal{C})$, sea $X_T = X \times_S T$, y sea $F(T)$ el conjunto de *subesquemas cerrados* de X_T *planos sobre* T; es un funtor contravariante de T. Grothendieck ha demostrado que este funtor es representable por un esquema $\mathrm{Hilb}_{X/S}$ que es unión disjunta de S-esquemas separados proyectivos $\mathrm{Hilb}^P_{X/S}$, indexados por ciertos polinomios con coeficientes racionales (ver [**10**], exposé 221 - ver también [**11**], exposé 16, para el caso analítico). Estos esquemas juegan un papel parecido al de las clásicas “coordenadas de Chow” (las cuales parametrizan los *ciclos*, y no los subesquemas). Su existencia implica fácilmente la de otros esquemas importantes (esquemas de morfismos, isomorfismos, etc - ver [**10**], loc. cit.); interviene también en la construcción de los esquemas de Picard y de los esquemas de moduli (ver más abajo).

(iii) *Esquemas de Picard.* (Aquí, la definición general del funtor F es delicada; me limitaré a un caso particular relativamente simple.) Sea $\pi : X \to S$ un morfismo de esquemas localmente noetherianos. Supóngase que π es proyectivo, plano, que admite una sección y que sus fibras son geométricamente íntegras. Pongamos

$$P_{X/S} = H^0(S, R^1\pi(\mathcal{O}_X^*)).$$

Vistas las hipótesis, este grupo se identifica con $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)/H^1(S, \mathcal{O}_S^*)$. Si T es un S-esquema localmente noetheriano, pongamos $F(T) = P_{X_T/T}$, con $X_T = X \times_S T$; es un funtor contravariante de T. Grothendieck ha probado que es representable por un S-esquema en grupos abelianos $\mathrm{Pic}_{X/S}$, llamado el *esquema de Picard de* X *sobre* S (ver [**10**], exposés 232-236 - ver también [**11**], exposé 16, para el caso analítico). En general, $\mathrm{Pic}_{X/S}$ no es de tipo finito sobre S: cuando S es el espectro de un cuerpo y S es simple

[2]Se encuentran en la obra de Grothendieck ([**11**], exposé 11) los criterios que permiten deducir la representabilidad de un funtor respecto de la de otros funtores. Ver también [**10**], exposé 195, para una caracterización de los funtores “prorrepresentables”.

sobre S, es una extensión del "grupo de Néron-Severi" de X (considerado como grupo discreto) por la "variedad de Picard" de X en el sentido clásico; además Mumford ha demostrado que es unión disjunta de esquemas casi proyectivos sobre S.

Las hipótesis hechas más arriba no son necesarias para que exista el esquema de Picard; por ekemplo Murre ha construido $\mathrm{Pic}_{X/S}$ para todo esquema separado X propio sobre un cuerpo k.

(iv) *Esquemas de moduli* (curvas de género dado). Si S es un esquema, una *curva de género g sobre S* es un S-esquema X que es simple, propio y cuyas fibras son curvas algebraicas de género g en el sentido usual. Para S y g dados, las clases (de isomorfismo) de tales curvas forman un conjunto $F_g(S)$; es un funtor contravariante de S. Además, para $g \geq 1$, el funtor F_g *no es* representable. Hace falta modificar la noción de "curva" por la de "curva rigidificada" (es decir, grosso modo, dotada de puntos de orden finito de su jacobiana); ver la definición precisa (en el caso analítico) en Grothendieck [**11**], exposé 7. Mumford ha demostrado, gracias a un teorema conveniente de paso al cociente, que los funtores así definidos son representables, y ha deducido la construcción del *esquema de moduli* de curvas de género g (en el sentido absoluto, es decir, "sobre $\mathbb{Z}$"); ver [**14, 15**]. En esta dirección, ya se dispone de numerosos resultados parciales: construcción del esquema de moduli sobre $\mathbb{Q}$ (Baily [**1, 2**]), estudio detallado de los géneros 1 y 2 (Igusa [**12, 13**]), caso analítico (ver por ejemplo Bers [**3**] y Grothendieck [**11**], exposés 7 y 17). En el caso general, falta todavía una "buena" compactificación de los esquemas de moduli sobre $\mathbb{Z}$ análoga a la hecha en género 1 por Igusa [**12**] y sobre $\mathbb{Q}$ por Baily [**2**].

3. Esquemas sobre un anillo local noetheriano completo En todo lo que sigue, denotamos por A un anillo local noetheriano completo, por $\mathfrak{m}$ el ideal maximal de A, y por k el cuerpo residual $A/\mathfrak{m}$.

Si X es un esquema separado sobre A, se le asocia la fibra X_0 del punto $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}(A)$, es decir, el esquema $X_0 = X \otimes_A A/\mathfrak{m}$. Si X es de tipo finito sobre A, X_0 es un *esquema algebraico sobre k*; se dice que X_0 se deduce de X por "reducción módulo $\mathfrak{m}$". Se trata, siempre que sea posible, de *reducir el estudio de* X al de X_0 (dotado frecuentemente de estructuras suplementarias).

Un primer paso en esta dirección consiste en reducir X, no solamente módulo $\mathfrak{m}$, sino módulo un ideal $\mathfrak{m}$-primario, por ejemplo una potencia de $\mathfrak{m}$. Los esquemas $X_n = X \otimes A/\mathfrak{m}^{n+1}$ así obtenidos tienen el mismo espacio topológico subyacente que X_0; sus haces estructurales forman un sistema proyectivo. El espacio X_0, dotado de este sistema proyectivo, se llama el *completado formal* de X, y se denota $\hat{X}$; es un "esquema formal", en el sentido de [**8**], I-10; representa, en cierto modo, los "entornos infinitesimales" de la fibra X_0; es el intermediario natural entre X_0 y X.

La situación es especialmente favorable cuando X es *propio* sobre A; en este caso resulta que el conocimiento de $\hat{X}$ *equivale* al de X (ver [**8**], III-5). De modo más preciso, se tienen los siguientes resultados:

(i) Sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo coherente, sea $\mathcal{F}_n = \mathcal{F} / \mathfrak{m}^{n+1} \mathcal{F}$, y sea $\hat{\mathcal{F}}$ el sistema proyectivo de los $\mathcal{F}_n$. Se tienen entonces isomorfismos canónicos:

$$H^q(X, \mathcal{F}) = \varprojlim H^q(X_n, \mathcal{F}_n) = H^q(\hat{X}, \hat{\mathcal{F}}) \quad q \geq 0.$$

Es un caso particular del "teorema de las funciones holomorfas", ver Grothendieck [**8**], III-4.

(ii) Llamemos "módulo coherente sobre $\hat{X}$" a un sistema proyectivo $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_n)$ de $\mathcal{O}_{X_n}$-módulos coherentes tales que $\mathcal{G}_n = \mathcal{G}_m \times_{X_m} X_n$ si $m \geq n$, y sea $\hat{\mathcal{C}}$ la categoría abeliana formada por estos sistemas. Sea por otro ladp $\mathcal{C}$ la categoría de $\mathcal{O}_X$-módulos coherentes. Entonces el funtor $\mathcal{F} \to \hat{\mathcal{F}}$ definido en (i) es una *equivalencia* de $\mathcal{C}$ con $\hat{\mathcal{C}}$. En particular, todo módulo coherente sobre $\hat{X}$ es isomorfo al completado formal $\hat{\mathcal{F}}$ de un $\mathcal{O}_X$-módulo coherente $\mathcal{F}$ (definido salvo un único isomorfismo). [Este es el "teorema de existencia en geometría formal", ver [**8**], III-5 - nótese la analogía con lo que permite pasar de la geometría analítica a la algebraica en $\mathbb{C}$].

Estos resultados tienen numerosas aplicaciones. Citemos por ejemplo:

(iii) (Ver [**7**], p. 182-11) Supongamos que X es *propio* y *plano* sobre A, y que $H^2(X_0, \mathcal{O}_{X_0}) = 0$. Entonces para cada $\mathcal{O}_{X_0}$-módulo de línea $\mathcal{F}_0$ sobre X_0 existe un $\mathcal{O}_X$-módulo de línea $\mathcal{F}$ sobre X tal que $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F} \times_X X_0$. En particular, si X_0 es proyectivo sobre k, X es proyectivo sobre A (tomando como $\mathcal{F}_0$ un módulo amplio[3]). [Se extiende $\mathcal{F}_0$ a los X_n progresivamente; la *obstrucción* para pasar de X_{n-1} a X_n se encuentra en $H^2(X_0, \mathcal{O}_{X_,}) \otimes \mathfrak{m}^n \,/\, \mathfrak{m}^{n+1}$, que es nula por hipótesis; se obtiene así un haz de línea $\mathcal{F}$ sobre $\hat{X}$, que es "algebraico" según (ii)].

(iv) (Ver [**7**], p. 182-24, y también [**9**]) Supongamos ahora que X es propio y plano sobre A. La aplicación canónica $\pi_1(X_0) \to \pi_1(X)$ es un isomorfismo de grupos.

[Basta demostrar que las categorías formadas por los revestimientos étales de X_0 y de X son equivalentes; ahora bien, un revestimiento étale de X_0 está definido por una $\mathcal{O}_{X_0}$-álgebra coherente $\mathcal{A}_0$ de cierto tipo; se prueba que se le puede asociar, de modo esencialmente único, un sistema proyectivo $\hat{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}_n)$ de $\mathcal{O}_{X_n}$-álgebras coherentes $\mathcal{A}_n$ del mismo tipo; se aplica entonces (ii) como arriba].

Desde este punto de vista, es natural intentar reconstruir[4] el esquema formal $\hat{X}$, o el propio esquema X, a partir de X_0 (exigiremos siempre que $\hat{X}$ sea *plano* sobre A). Supongamos, para simplificar, que X_0 es *simple* sobre k, o sea, que X_0 es una "variedad algebraica no singular". La construcción de X_n a partir de X_{n-1} se enfrenta a una *obstrucción* que pertenece a $H^2(X_0, \mathcal{D}_0) \otimes \mathfrak{m}^n \,/\, \mathfrak{m}^{n+1}$, donde $\mathcal{D}_0$ designa el $\mathcal{O}_{X_0}$-módulo de las k-derivaciones de $\mathcal{O}_{X_0}$ (correspondiente al fibrado tangente de X_0). Si $H^2(X_0, \mathcal{D}_0)$ es nulo, esta obstrucción es nula, y se puede construir el sistema de los X_n, dando un esquema formal $\hat{X}$; si X_0 es proyectivo y $H^2(X_0, \mathcal{O}_{X_0})$ es nulo, el método empleado en (iii) más arriba muestra que $\hat{X}$ es el completado formal de un esquema X que es proyectivo y plano sobre A; es el esquema buscado.

Cuando k es de característica $p > 0$, es interesante tomar como A un anillo de valoración discreta de característica 0 (por ejemplo el anillo $W(k)$ de los vectores de Witt

[3]Los haces de línea amplios determinan inmersiones proyectivas

[4]La clasificación de esquemas formales así obtenidos conduce a la noción de "moduli de esquemas formales", ver Grothendieck [**7**], p. 182-16, así como [**10**], exposé 195.

con coeficientes en k, si k es perfecto); se "remonta" también X_0 de característica p a característica 0 (siempre suponiendo la nulidad de $H^2(X_0, \mathcal{D}_0)$ y de $H^2(X_0, \mathcal{O}_{X_0})$). En particular, *toda curva algebraica se remonta*; de este resultado, junto con (iv), Grothendieck ha deducido la determinación de la parte "prima con p" del grupo fundamental de una curva en característica p (ver [**7, 9**]). En dimensión superior, existen esquemas proyectivos y simples que no se remontan a característica 0 (así como esquemas formales); hay ejemplos en [**21**] (estos ejemplos son de dimensión ≥ 3, pero Mumford ha encontrado analogías en dimensión 2). Este tipo de cuestiones merece un estudio en profundidad. ¿Se pueden por ejemplo definir directamente (por argumentos de geometría diferencial) las obstrucciones mencionadas arriba? Están sin duda relacionadas con la cohomología de X_0 con valores en los vectores de Witt ([**18**]). ¿Qué se puede decir del levantamiento de morfismos (en particular de los morfismos "de Frobenius")? El único caso estudiado ha sido el de las curvas elípticas (Deuring [**4**]).

Los métodos anteriores hacen intervenir de modo esencial los *esquemas sobre anillos artinianos.* Según Greenberg [**6**], estos últimos pueden reducirse - en cierta medida - a *esquemas algebraicos.* Con más precisión, supongamos que el cuerpo residual k es *perfecto*, y que el anillo local A tiene longitud finita N; si k es de característica 0, escogemos un levantamiento de k en A. Se puede entonces describir los elementos de A por medio de N coordenadas con valores en k, con leyes de composición siendo polinomios en estas coordenadas (es claro que si k es de característica 0, entonces A es una k-álgebra - en característica p se utiliza que A es una álgebra sobre el anillo $W(k)$ de vectores de Witt); estas leyes polinomiales definen un *esquema en anillos* Λ sobre k, y se tiene $\Lambda_k = A$. Sea ahora $\mathcal{C}_k$ (resp. $\mathcal{C}_A$) la categoría de k-esquemas (resp. de A-esquemas) de tipo finito. Si $Y \in Ob(\mathcal{C}_k)$, sea GY el A-esquema obtenido dotando a Y del haz de gérmenes de k-morfismos de Y en Λ. Se define así un funtor $G : \mathcal{C}_k \to \mathcal{C}_A$ que tiene un *adjunto* $F : \mathcal{C}_A \to \mathcal{C}_k$; a dicho adjunto se le llama *funtor de Greenberg.* Por definición, si Y es un k-esquema y X un A-esquema, se tiene

$$\mathrm{Hom}_A(GY, X) = \mathrm{Hom}_k(Y, FX)$$

lo que da, tomando $Y = \mathrm{Spec}(k)$, la fórmula $X_A = (FX)_k$.

Volvamos ahora al caso de un anillo local noetheriano completo A, con cuerpo residual perfecto k, y sea X un esquema de tipo finito sobre A (o más generalmente un esquema formal de tipo finito). Para todo $n \geq 0$, se puede aplicar el funtor de Grenberg al $A/\mathfrak{m}^{n+1}$-esquema X_n definido más arriba; se le asocia así a X un *sistema proyectivo* $FX = (FX_n)$ de *esquemas algebraicos sobre* k; se tiene entonces $X_A = (FX)_k = \lim_{\longleftarrow}(FX_n)_k$. Se encontrará en [**6**] una lista de propiedades elementales del funtor F. Convendría completarla en algunos aspectos. Por ejemplo, si X es amplio sobre A, Greenberg ha demostrado que cada FX_n es un fibrado sobre el anterior, y ha determinado el grupo estructural; cuando A es un anillo de valoración discreta, con cuerpo de fracciones K, un resultado análogo debe ser válido (para n lo bastante grande) cuando se supone solamente que $X \otimes_A K$ es amplio sobre K (ver Néron [**17**] y Bourbaki, Álgebra Conmutativa). Sería igualmente interesante (y sin duda más difícil) "enriquecer" el sistema de los FX_n con estructuras extra que permitan reconstruir el esquema formal de partida.

Cuando X es un *esquema en grupos* sobre A, los FX_n forman un *sistema proyectivo de grupos algebraicos*. Así se introducen los *grupos proalgebraicos*, límites proyectivos de grupos algebraicos. En el caso conmutativo, estos grupos forman una categoría abeliana $\mathbf{P}$, que contiene a la categoría $\mathbf{P}_i$ de grupos proalgebraicos "infinitesimales"(es decir, límites proyectivos de grupos reducidos al elemento neutro). La categoría cociente $\mathbf{P}/\mathbf{P}_i$ ha sido estudiada en detalle en [**19**] (suponiendo k algebraicamente cerrado). En cuanto a la categoría $\mathbf{P}_i$, constituye el marco natural de la teoría de "grupos formales" conmutativos de Dieudonné (ver Gabriel [**5**] y Cartier).

El *grupo multiplicativo* G_m exhibe un ejemplo simple de lo que precede: se le asocia un grupo proalgebraico U, y los puntos de U racionales sobre k se corresponden biunívocamente con las unidades de A. Cuando A es un anillo de valoración discreta, el cuerpo de fracciones K y cuerpo residual algebraicamente cerrado, el grupo U así obtenido *determina las extensiones abelianas de* K: el grupo de Galois de la extensión abeliana maximal de K es isomorfo al grupo fundamental $\pi_1(U)$ del grupo proalgebraico U (ver [**20**]).

En este orden de cosas se tienen también los resultados extremadamente interesantes de Néron (resumidos en [**16**] y [**17**]). Aquí, se parte de una variedad abeliana C sobre el cuerpo de fracciones K de A, y se busca un esquema en grupos Γ simple sobre A tal que $\Gamma \otimes_A K = C$; con más precisión, Néron muestra[5] que se puede escoger Γ de tal modo que, para todo esquema X simple sobre A, la aplicación canónica:

$$\mathrm{Hom}_A(X, \Gamma) \to \mathrm{Hom}_K(X \otimes_A K, C)$$

sea una biyección (en otras palabras, Γ *representa* el funtor $\mathrm{Hom}_K(X \otimes_A K, C)$) en la categoría de esquemas simples sobre A). Tomando $X = \mathrm{Spec}(A)$, se ve en particular que C_K se identifica con Γ_A; gracias al funtor de Greenberg, este último grupo se identifica con el grupo $(F\Gamma)_k$ de puntos racionales sobre k de un grupo proalgebraico conmutativo $F\Gamma$. Este resultado ha sido utilizado por Shafarevich y Ogg en el estudio de la cohomología galoisiana de C (siendo k alg. cerrado). Esto no ha sido más que el comienzo; según Grothendieck, debe existir un "teorema de dualidad" que englobe estos resultados, los de Tate (cuando k es finito) y los de la teoría de cuerpos de clases local (en el sentido clásico - y en el de [**20**]).

[5] Cuando C es de dimensión 1, Néron tiene un teorema más preciso: sumerge Γ en un esquema $\overline{\Gamma}$ proyectivo sobre A y regular, satisfaciendo cierta propiedad de minimalidad (ver [**16, 17**]).

Bibliografía

[1] Baily, W.: Sobre el moduli de variedades jacobianas y curvas.
[2] Baily, W.: Sobre la teoria de funciones θ, el moduli de variedades abelianas y el moduli de curvas.
[3] Bers, L.: Uniformización y moduli.
[4] Deuring, M.: Die Typen der Multiplikatorenringe elliptischer Funktionen-körper.
[5] Gabriel, P.: Categorías abelianas localmente noetherianas y sus aplicaciones a las álgebras estudiadas por Dieudonné.
[6] Greenberg, M.: Esquemas sobre anillos locales.
[7] Grothendieck, A.: Geometría formal y geometría algebraica.
[8] Grothendieck, A.: Elementos de geometría algebraica.
[9] Grothendieck, A.: *Seminario de geometría algebraica (IHES).*
[10] Grothendieck, A.: Técnica del descenso y teoremas de existencia en geometría algebraica.
[11] Grothendieck, A.: Técnicas de construcción en geometría analítica.
[12] Igusa, J.: Modelo kroneckeriano de cuerpos de funciones modulares elípticas.
[13] Igusa, J.: Variedad aritmética de moduli en género 2.
[14] Mumford, D.: Teorema elemental en teoría geométrica de invariantes.
[15] Mumford, D.: Teoría geométrica de invariantes.
[16] Néron, A.: Reducción de variedades abelianas.
[17] Néron, A.: Modelos p-minimales de variedades abelianas.
[18] Serre, J-P.: Sobre la topología de variedades algebraicas en característica p.
[19] Serre, J-P.: Grupos proalgebraicos.
[20] Serre, J-P.: Sobre los cuerpos locales con cuerpo residual algebraicamente cerrado.
[21] Serre, J-P.: Ejemplos de variedades proyectivas en característica p no levantables en característica 0.